東海學報36(3)1995:95-116
民國八十四七月出版

貝氏可能值推測方法之研究

胡 坤 德*

摘 要

本研究在考量母數之數種可能事前分配及實際經驗分配下，以貝氏方法推導出該母數之事後分配，並藉此計算可能值，期望做更圓滿合理的推測。

本文涉及的事前分配計有Beta分配、均勻分配、Gamma分配、卡方分配及常態分配等五種常用機率分配，而探討之實際經驗分配則有與不良率關係密切的二項分配，與缺點數關係密切之Poisson分配及與計量值關係密切之常態分配等三種機率分配。

以貝氏方法導出母數之事後分配，於文末列表供各界應用，是本研究貢獻之一。相關機率值的計算，為避免使用近似分配取得近似值的做法，本研究提供精確值的計算技巧，供各界參採，是其貢獻之二。建立母數最大可能值與可能界限的觀念，並因突破各事後分配的機率值之計算工作，得以刷新假設檢定的做法，是其貢獻之三。

關鍵詞：事前分配、經驗分配、事後分配、貝氏方法、可能值、最大可能估計值、可能界限、假設檢定。

前 言

貝氏方法(Bayesian procedures)的研究範疇至為廣泛，舉凡統計學上的機率問題，估計問題(Estimation of Parameters)、檢定問題、(tests of statistical hypotheses)、迴歸分析(Regression analysis)以及其他自然科學或社會科學上之應用問題等，均可利用貝氏方法加以分析處理。本文旨在以貝氏方法導出母數之事後分配，藉可能值以建立母數之推測方法，期使推測所得的結果能較圓滿合理。

傳統的推測統計方法,不利用已有的情報,例如事前機率分配(Prior Probability distribution)，而逕以抽樣所得的樣本資料,由最概法(Maximum likelihood method)或其他傳統方法以誘導母體之母數的估計值(Estimater)、與信賴區間(Confidence intervals)等，然後根據導出的公式，據以進行推測工作。此等推測方式，夙為學者所研究，且大部分均成定案。但以貝氏去處理分析者，目前方興未艾，有志於這方面的研究之統計學者，人數日多，研究結果雖尚未趨於完美之境界，然則咸信不久即可到達。

*東海大學工業工程系

我們若能獲悉事前機率分配$h(\theta)$，則貝氏推測方法，無疑是最佳的統計方法，而事前分配是推算決策者積多次研究累積的數據，以合理方式所推導建立，故貝氏方法很值得研究推廣。

假設隨機變數 x 服從某一分配，該分配的母數爲θ，而θ爲集合Ω的一個元素。比如，θ代表常態分配的平均數，則Ω可以是一條實數線。在傳統的推測統計方法，都是把母數θ當做一個固定的未知數。茲設隨機變數Θ服從一個分布於Ω的機率分配，而把θ視爲Θ的觀測值(Experiment or observed value)，如同把x當做X的觀測值。(爲敘述方便，本文往往把大寫字母當做隨機變數，小寫字母爲其觀測值)。因此X所服從的分配，其母數θ乃是隨機變數Θ的一個觀測值。若設Θ的機率密度函數(Probability density function)以$h(\theta)$表之)，則當$\theta \notin \Omega$時，$h(\theta)=0$。令X_1，X_2，.....X_n，表示從X之分配抽取的一組隨機樣本，Y表該組樣本的統計量(Statistic)是X_1，X_2，.....X_n的函數。機率密度函數簡記爲*p.d.f.*則對於每一不同的θ值，Y的*p.d.f.*以$g(y|\theta)$表之，是Y的所謂抽樣分配之*p.d.f.*(在傳統的推測統計學中，以g(y)或$g(y;\theta)$表之)，因此Y與Θ的聯合*p.d.f.*爲

$$k(y,\theta)=h(\theta)g(y|\theta)$$

若Θ爲離散型(*Discrete type*)隨機變數，則Y的邊際*p.d.f.*爲

$$k_1(y)=\sum_{\theta} h(\theta)g(y|\theta)$$

若Θ爲連續型變數，Y的邊際*p.d.f.*爲

$$k_1(y)=\int_{-\infty}^{\infty} h(\theta)g(y|\theta)d\theta$$

故當Y=y時Θ的條件*p.d.f.*爲

$$k(\theta|y)=\frac{k(y,\theta)}{k_1(y)}=\frac{h(\theta)g(y|\theta)}{k_1(y)}$$

式中$k_1(y)>0$。

以上提到的各種*p.d.f.*其名稱綜合敘述於後：

$h(\theta)$：Θ的事前*p.d.f.*(Prior *p.d.f.* of Θ)因爲$h(\theta)$是在抽樣觀測之前，由統計學者根據事前情報先行確定的函數。

$g(y|\theta)$：當 $\Theta=\theta$時 Y 的條件 *p.d.f.* 或稱爲實際經驗 *p.d.f.* (*p.d.f.* of empirical evidence)。

$k(\theta|y)$：Θ的事後*p.d.f.*(Posterior *p.d.f.* of Θ)，因爲$k(\theta|y)$是在抽樣觀測之後，得統計量Y的觀測值爲y，據以確定的機率密度函數。

$k(y,\theta)$：Y與Θ的聯合$p.d.f.$
$k_1(y)$ ：Y的邊際$p.d.f.$

上述關係簡而言之，即Θ的事前$p.d.f.$經實際經驗機率調整後，成爲Θ的事後$p.d.f.$表示如下圖：

事前$p.d.f$ $h(\theta)$	與	實際經驗$p.d.f$ $g(y \mid \theta)$	產生 →	事後$p.d.f$ $k(\theta \mid y)$

取得Θ的事後$p.d.f.$之後，藉可能值的計算，建立θ之推測方法如下述：

(1)當$\theta=\hat{\theta}$時，$k(\theta \mid y)$有極大值，稱$\hat{\theta}$爲θ之最大可能估計值

(2)$P(l<\Theta<u \mid y)=1-\alpha$稱$(l,u)$爲θ之100(1-α)%可能界限

此時母數θ視爲隨機變數Θ之一觀測值，而Θ介於常數l與u之間的機率爲1-α，故稱(l,u)爲θ之100(1-α)%可能界限，與傳統推測方法的信賴區間明顯有別。在傳統的推測方法，視θ爲未知常數由

$$1-\alpha=P[L(X_1,X_2,\ldots,X_n)\le\theta\le U(X_1,X_2,\ldots,X_n)]$$

即隨機區間包含未知母數θ之機率爲1-α，取得一組樣本資料之後，代入L與U得一常數區間(l,u)，稱爲θ之100(1-α)%信賴區間。

(3)以α爲顯著水準，檢定

(i)$H_0：\theta\le\theta_0$ 對 $H_1：\theta>\theta_0$
若$P(\Theta\le\theta_0 \mid y)\le\alpha$，則否定$H_0$

(ii)$H_0:\theta\ge\theta_0$ 對 $H_1:\theta<\theta_0$
若$P(\Theta\ge\theta_0 \mid y)\le\alpha$，則否定$H_0$

(iii)$H_0:\theta=\theta_0$ 對$H_1:\theta\ne\theta_0$
若$P(\Theta<\theta_0 \mid y)\le\frac{\alpha}{2}$，或$P(\Theta>\theta_0 \mid y)\le\frac{\alpha}{2}$，則否定$H_0$

上述各機率值的計算工作，本文均能求得其精確值，而不必使用近似分配求得的近似值充當之，是本文在統計學界做最大努力的成果呈現，盼斯界先進不吝指正，並思考其難度與創意所在，不勝感激之至。所有計算工作電子計算機的操作法，附在文末的註解，請參閱。

在事前Beta分配假設下，實際經驗二項分配之母數p的推測方法

假設某一特性在母體所佔的比率爲p。茲從該母體抽取n項調查，令X_i表抽出之第i項具有該特性者的個數。若令$Y=\sum_{i=1}^{n} X_i$，則Y服從二項分配$b(n,p)$。如果根據過去調查的資料或其事前情報，斷定比率p是Beta分配的一個數值，易言之，p爲隨機變數P之一觀測值，而P的事前$p.d.f.$爲

$$h(p)=\frac{\Gamma(\alpha+\beta)}{\Gamma(\alpha)\Gamma(\beta)}P^{\alpha-1}(1-P)^{\beta-1},0<p<1$$

因爲Y服從b(n,p)即Y當P＝p時的條件$p.d.f.$爲

$$g(y\mid p)=\binom{n}{y}p^{y}(1-p)^{n-y}\quad y=0,1,2,\ldots,n$$

故Y與P聯合$p.d.f.$爲

$$\begin{aligned}k(y,p)&=h(p)g(y\mid p)\\&=\binom{n}{y}\frac{\Gamma(\alpha+\beta)}{\Gamma(\alpha)\Gamma(\beta)}p^{\alpha+y-1}(1-p)^{\beta+n-y-1}\end{aligned}$$

y=0,1,2,…,n　0<p<1

故Y的邊際$p.d.f.$爲

$$\begin{aligned}k_1(\mathrm{y})&=\int_0^1 k(y,p)dp\\&=\binom{n}{y}\frac{\Gamma(\alpha+\beta)}{\Gamma(\alpha)\Gamma(\beta)}\int_0^1 p^{\alpha+y-1}(1-p)^{\beta+n-y-1}dp\\&=\binom{n}{y}\frac{\Gamma(\alpha+\beta)}{\Gamma(\alpha)\Gamma(\beta)}\frac{\Gamma(\alpha+y)\Gamma(\beta+n-y)}{\Gamma(n+\alpha+\beta)}\end{aligned}$$

式中y=0,1,2,…n，因此p的事後$p.d.f.$爲

$$k(p\mid y)=\frac{k(y,p)}{k_1(y)}=\frac{\Gamma(n+\alpha+\beta)}{\Gamma(\alpha+y)\Gamma(\beta+n-y)}p^{\alpha+y-1}(1-p)^{\beta+n-y-1}$$

式中0<p<1,y=0,1,2,…,n

舉一例說明其應用。

例1.某電器公司想要估計其產品在台中市銷售比率p，派人在台中市隨機調查100個家庭，發現有21家購買該公司製品。根據事前情報，統計學者視p爲隨機變數P之一值，而確定P服從Beta分配，母數爲$\alpha=5$，$\beta=3$，求

(1)P之最大可能估計值

(2)P之95% 可能界限

(3)以0.05爲顯著水準檢定對$H_0: P \geq 0.25$對$H_0: P < 0.25$

解：已知 n=100，y=21，$\alpha=5$，$\beta=3$得P之事後$p.d.f$爲

$$k(p \mid y=21)=\frac{\Gamma(n+\alpha+\beta)}{\Gamma(\alpha+y)\Gamma(\beta+n-y)}p^{\alpha+y-1}(1-p)^{\beta+n-y-1}$$

$$=\frac{\Gamma(108)}{\Gamma(26)\Gamma(82)}p^{25}(1-p)^{81}$$

$$=1.36400601\text{x}10^{26}P^{25}(1-P)^{81}$$

式中0<p<1

（1）計算得下表機率密度值(註1)

p	0.21	0.22	0.23	0.24	0.25	0.26
k(p｜y=21)	7.9085	9.1067	9.6330	9.6827	9.1892	8.2588

得p之最大可能估計值爲0.24

（2）欲求$P(l<P<\mu \mid y=21)=0.95$之$l$與$u$

相當於求$P(P\leq l \mid y=21)=0.025$與$(P\geq u \mid y=21)=0.025$之$l$與$u$

令$P_1=P(P\leq a \mid y=21)=\int_0^a k(P \mid y=21)dp$

及$P_2=P(P\geq b \mid y=21)=\int_b^1 k(P \mid y=21)dp$

計算得下表(註2)

a	.16	0.165	0.1652	0.1653	b	0.32	0.325	0.3253
P_1	0.0171	0.0245	0.0249	0.0250	P_2	0.0325	0.0254	0.0250

P之95%可能界限爲(0.1653,0.3253)

(3)$P(P \geq 0.25 \mid y=21) = \int_{0.25}^{1} k(P \mid y=21)dp = 0.3968 > 0.0$

不能否定$H_0 : P \geq 0.25$

在事前均勻分配假設下，實際經驗二項分配之母數P的推測方法

假設某一特性在母體所佔的比率爲p，根據過去的資料及其他事前情報，知道p爲佈於[a,b]內的任意一個數值，0<a<b<1，亦即視p爲隨機變數P之一値，可定P的事前分配爲均勻分配，其$p.d.f.$如下

$$h(p) = \frac{1}{b-a}, 0 < a \leq p \leq b \leq 1$$

茲從該母體抽取n項調查，令Xi表抽出之第i項具有該特性者之個數，則令$Y = \sum_{i=1}^{n} X_i$，知Y服從二項分配b(n,p)，亦即Y的實際經驗$p.d.f.$爲

$$g(y \mid p) = \binom{n}{y} p^y (1-p)^{n-y}, y = 0, 1, 2, \ldots.., n$$

因此Y與P的聯合$p.d.f.$爲

$$k(y,p) = h(p)g(y \mid p) = \frac{\binom{n}{y}}{b-a} p^y (1-p)^{n-y}$$

式中y=0,1,2,…,n, $\qquad 0 < a \leq p \leq b < 1$

得Y的邊際$p.d.f.$爲

$$k_1(y) = \int_a^b k(y,p)dp = \frac{\binom{n}{y}}{b-a} \int_a^b p^y (1-p)^{n-y} dp$$

但

$$\int_a^b p^y (1-p)^{n-y} dp$$

$$=\int_0^b p^y(1-p)^{n-y}dp-\int_0^a p^y(1-p)^{n-y}dp$$
$$=B_b(y+1,n-y+1)-B_a(y+1,n-y+1)$$

式中

$$B_z(m,n)=\int_0^z p^{m-1}(1-p)^{n-1}dp$$

是不完全Beta函數(Incomplete Beta function)

即

$$k_1(y)=\frac{\binom{n}{y}}{b-a}[B_b(y+1,n-y+1)-B_a(y+1,n-y+1)]$$

式中y=0,1,2,…,n，

故P的事後$p.d.f.$爲

$$k(p\mid y)=\frac{k(y,p)}{k_1(y)}=\frac{p^y(1-p)^{n-y}}{B_b(y+1,n-y+1)-B_a(y+1,n-y+1)}$$

式中$0<a\le p\le b<1,\ y=0,1,2,......,n$

舉一實例說明其應用。

例2.根據本校歷年來的統計資料，學生近視者所佔的比率在0.1與0.3之間，因此定近視學生比率p爲均勻分配之一值，即視p爲隨機變數P之一值，定P的事前$p.d.f.$如下:

$$h(p)=5, 0.1\le p\le 0.3,\text{ 其它點}h(p)=0$$

爲推測本年度新生近視者比率，茲隨機抽查30位新同學，是近視者有6位。求

(1)P之最大可能估計值

(2)P之95%可能界限

(3)以0.05爲顯著水準檢定$H_0:p\le 0.25$對H_1:p>0.25

解:已知a=0.1, b=0.3, n=30, y=6,得P之事後$p.d.f$爲

$$k(p \mid y=6)=\frac{p^6(1-p)^{24}}{B_{0.3}(7,25)-B_{0.1}(7,25)} \quad \text{式中} \;\; 0.1 \le p \le 0.3$$

$$B_{0.3}(7,25)=\int_0^{0.3} p^6(1-p)^{24}dp$$

$$B_{0.1}(7,25)=\int_0^{0.1} p^6(1-p)^{24}dp$$

$$B_{0.3}(7,25)-B_{0.1}(7,25)=\int_{0.1}^{0.3} p^6(1-p)^{24}dp=4.53518\times 10^{-8}$$ (註3)

即

$$k(p \mid y=6)=\frac{p^6(1-p)^{24}}{4.53518\times 10^{-8}},\; 0.1 \le p \le 0.3$$

(1)對各不同之P值計算得下表:(註4)

P	0.199	0.200	0.201
$k(p \mid y=6)$	6.6635	6.6642	6.6635

可知P之最大可能估計值爲0.2

(2)令

$$P_1=P(P \le a \mid y=6)=\int_{0.1}^{a} k(p \mid y=6)dp$$

$$P_2=P(P \ge b \mid y=6)=\int_{b}^{0.3} k(p \mid y=6)d$$

計算得下表:(註5)

a	0.12	0.112	0.1118	0.1117	b	0.29	0.292	0.2923	0.2924
P_1	0.0478	0.0255	0.0250	0.0248	P_2	0.00330	0.0261	0.0250	0.0247

P之95%可能界限爲(0.1118,0.2923)

(3) $P(P \le 0.25)=\int_{0.1}^{0.25} k(p \mid y=6)dp=0.7879>0.05$

不能否定 $H_0: P \le 0.25$

在事前均勻分配假設下，實際經驗Poisson分配之平均數μ的推測方法

令X服從Poisson分配，平均數爲μ，是隨機變數M之一值。從該分配隨機抽取n項X_1，X_2，.....X_n當做一組樣本，則$Y=\sum_{i=1}^{n} X_i$仍服從Poisson分配，平均數爲$n\mu$亦即，Y的實際經驗$p.d.f.$爲

$$g(y \mid \mu)=\frac{(n\mu)^y e^{-n\mu}}{y!},\ y=0,1,2,\ldots$$

假設隨機變數M的事前$p.d.f.$爲

$$h(\mu)=\frac{1}{b-a},\ 0<a\leq\mu\leq b$$

因此Y與M的聯合$p.d.f.$爲

$$k(y,\mu)=\frac{(n\mu)^y e^{-n\mu}}{(b-1)y!},\quad 0<a\leq\mu\leq b, y=0,1,2,\ldots$$

得Y的邊際$p.d.f.$爲

$$k_1(y)=\int_a^b k(y,\mu)d\mu$$

$$=\frac{1}{(b-a)\cdot y!}\int_a^b (n\mu)^y e^{-n\mu}d\mu$$

令 $n\mu=w, \mu=\frac{w}{n}, d\mu=\frac{1}{n}dw$

則

$$k_1(y)=\frac{1}{n(b-a)\cdot y!}\int_{na}^{nb} w^y e^{-w}dw$$

$$=\frac{1}{n(b-a)\cdot y!}[\Gamma_{nb}(y+1)-\Gamma_{na}(y+1)]$$

式中y=0,1,2,.........,及$\Gamma_z(n)=\int_0^z w^{n-1}e^{-w}dw$

是不完全Gamma函數*(Incomplete Gamma function)*故M的事後$p.d.f.$爲

$$k(\mu \mid y)=\frac{n(n\mu)^y e^{-n\mu}}{\Gamma_{nb}(y+1)-\Gamma_{na}(y+1)},\quad 0<a\leq\mu\leq b, y=0,1,2,\ldots$$

舉一實例說明其應用。

例3.假設某十字路口每十秒鐘通過車輛的平均數爲μ。茲在該十字路口3個不同時刻各記錄十秒鐘內通過的汽車輛數，得總數y=7。但根據以往的資料，μ的可能範圍爲0與3之間，亦即，視μ爲隨機變數M之一値，定M的事前$p.d.f.$爲

$$h(\mu)=\frac{1}{3},0\leq\mu\leq 3$$

而Y的實際經驗分配爲$Poisson$分配，母數爲3μ求

(1) μ之最大可能估計值

(2) μ之95%可能界限

(3)以0.05爲顯著水準,檢定$H_0:\mu=1.5$對$H_1:\mu\neq 1.5$

解:已知a=0,b=3,n=3,y=7,得M之事後p,d,f爲

$$k(\mu\mid y=7)=\frac{3(3\mu)7e^{-3\mu}}{\Gamma_9(8)-\Gamma_0(8)}=\frac{3(3\mu)^7e^{-3\mu}}{\Gamma_9(8)}$$

式中$\Gamma_9(8)=\int_0^9 w^7e^{-w}dw=3407.56$ (註6)

$\Gamma_0(8)=0$

即

$$k(\mu\mid y=7)=\frac{3(3\mu)^7e^{-3\mu}}{3407.56},0\leq\mu\leq 3$$

(1)計算不同μ值之$k(\mu\mid y{=}7)$得下表:(註7)

μ	2.1	2.2	2.3	2.4	2.5
$k(\mu\mid y{=}7)$	0.6368	0.6533	0.6607	0.6593	0.6500

可知μ之最大可能估計值爲2.3

(2)$P_1=(M\leq a\mid y=7)=\int_0^a k(\mu\mid y=7)d\mu$

$P_2=(M\geq b\mid y=7)=\int_b^3 k(\mu\mid y=7)d\mu$ (註8)

a	1.1	1.07	1.068	1.067	b	2.9	2.95	2.952	2.953
P_1	0.0293	0,0253	0.0251	0.0249	P_2	0.0537	0.0264	0.0253	0.0248

由上表得μ之95%可能界限爲(1.068,2.952)

(3)以0.05爲顯著水準，檢定$H_0: \mu = 1.5$對$H_1: \mu \neq 1.5$

$P(M \leq 1.5 \mid y = 7) = 0.1281 > 0.05$

$P(M \geq 1.5 \mid y = 7) = 0.8719 > 0.05$

不否定H_0

在事前Gamma分配假設下，實際經驗Poisson分配之平均數μ的推測方法

從母數爲μ之*Poisson*分配，抽取一組含n項的隨機樣本X_1，X_2，.....X_n。令$Y=\sum_{i=1}^{n} X_i$，則Y亦服從*Poisson*分配，平均數是$n\mu$，即Y的實際經驗爲*Poisson*分配，其*p.d.f.*爲

$$g(y \mid \mu) = \frac{(n\mu)^y e^{-n\mu}}{y!}, y = 0, 1, 2, \ldots$$

若根據事前情報，發現未知母數μ出現的機會係依*Gamma*分配，其母數爲α與β，即視μ爲隨機變數M之一值，定M的事前*p.d.f.*爲

$$h(\mu) = \frac{1}{\Gamma(\alpha)\beta^\alpha}\mu^{\alpha-1}e^{-\frac{\mu}{\beta}}, 0 < \mu < \infty$$

則Y與M的聯合*p.d.f.*爲

$$k(y, \mu) = \frac{n^y}{y!\Gamma(\alpha)\beta^\alpha}\mu^{\alpha+y-1}e^{-(n+\frac{1}{\beta})\mu}$$

式中y=0,1,2,...,$0 < \mu < \infty$

因此Y的邊際*p.d.f.*爲

$$k_1(y) = \frac{n^y}{y!\Gamma(\alpha)\beta^\alpha}\int_0^\infty \mu^{\alpha+y-1}e^{-(n+\frac{1}{\beta})\mu}d\mu$$

令$\frac{n\beta+1}{\beta}\mu = w$則$\mu = \frac{\beta}{n\beta+1}w$，$d\mu = \frac{\beta}{n\beta+1}dw$

即

$$k_1(y) = \frac{n^y}{y!\Gamma(\alpha)\beta^\alpha}\int_0^\infty (\frac{\beta}{n\beta+1})^{\alpha+y}w^{\alpha+y-1}e^{-w}dw$$

$$= \frac{n^y\beta^y}{y!\Gamma(\alpha)(n\beta+1)^{\alpha+\beta}}\Gamma(\alpha+y)$$

y=0,1,2,...得M的事後p.d.f.爲

$$k(\mu \mid y)=\frac{1}{\Gamma(\alpha+y)(\frac{\beta}{n\beta+1})^{\alpha+y}}\mu^{\alpha+y-1}e^{-\frac{n\beta+1}{\beta}\mu}$$

式中$0<\mu<\infty$，y=0,1,2,..亦即M的事後分配是*Gamma*分配，母數爲α+y與$\frac{\beta}{n\beta+1}$。

舉一實例說明其應用：

例4.某公司招考打字員，每位應徵者必須打5張紙。根據一般的觀察瞭解，每一位應徵者每頁打錯字數的平均數M係服從Gamma分配，母數$\alpha=5, \beta=1$，從應徵者之一檢查其答卷，5張紙中發現12個錯字，設這位應徵者打錯字數服從*Poisson*分配，平均錯字數爲μ，求

(1)μ之最大可能估計值

(2)μ之95%可能界限

(3)以0.05爲顯著水準，檢定$H_0: \mu \geq 5$ 對 $H_1: \mu <$

解:已知 α=5 β=1 n=5 y=12

$$\alpha+y=17，\frac{\beta}{(n\beta+1)}=\frac{1}{6}$$

可知M的事後*p.d.f*爲

$$k(\mu|y=12)=\frac{6^{17}}{\Gamma(17)}\mu^{16}e^{-6\mu}, 0<\mu<\infty$$

(1)計算得下表機率密度值(註9)

μ	2.5	2.6	2.7	2.8	2.9
$k(\mu \mid y=12)$	0.5762.	0.5923	0.5946	0.5839	0.5618

得μ之最大可能估計值爲2.7

(2)

$$P_1 = P(M \le a \mid y=12) = \int_0^a k(\mu \mid y=12)d\mu$$

$$P_2 = P(M \ge b \mid y=12) = \int_b^\infty k(\mu \mid y=12)d\mu$$

計算得下表:(註10)

a	1.7	1.65	1.651	1.652	b	4	4.3	4.33	4.331
P_1	0.0316	0.0249	0.0251	0.0252	P_2	0.0563	0.0270	0.0250	0.0249

得μ之95%可能界限爲(1.651,4.33)

(3) 以0.05爲顯著水準，檢定$H_0 : \mu \ge$ 對$H_1 : \mu < 5$

$$P(M \ge 5 \mid y=12) = \int_5^\infty k(\mu \mid y=12)d\mu = 0.0039 < 0.05$$

否定H_0

在事前卡方分配假設下，實際經驗Poisson分配之平均數μ的推測方法

Gamma分配，若其母數$\alpha = \frac{r}{2}$，r爲正整數，$\beta=2$，則成爲卡方分配，自由度爲r。若M之事前係卡方分配，Y的實際經驗爲Poisson分配，由前節可知，M的事後分配是Gamma分配母數爲$\frac{r}{2}+y$與$\frac{2}{2n+1}$，舉一實例說明其應用。

例5.根據過去的資料，百貨公司某一櫃台每小時的平均顧客人數μ爲隨機變數M之一值，而M服從卡方分配，自由度爲8，即M的事前分配爲，今天在該櫃台三個不同時刻各記錄一小時的顧客人數爲$x_1=6$，$x_2=12$，$x_3=8$，得$y=x_1+x_2+x_3=26$，設每小時顧客人數服從Poisson分配。求

(1)μ之最大可能估計値

(2)μ之95%可能界限

(3)以0.05爲顯著水準，檢定$H_0 : \mu \le 6$ 對$H_0 : \mu > 6$

解:已知r=8，n=3，y=26，得M的事後$p.d.f.$爲

$$k(\mu|y=26)=\frac{1}{\Gamma(30)(\frac{2}{7})^{30}}\mu^{29}e^{-3.5}$$

$$=\frac{1}{29!(\frac{2}{7})^{30}}\mu^{29}e^{-3.5\mu},0<\mu<$$

(1)對不同的μ值計算得其密度如下表:(註11)

μ	8.0	8.1	8.2	8.3	8.4	8.5
$k(\mu \mid y=26)$	0.2540	0.2566	0.2581	0.2585	0.2578	0.2561

根據上表,可知μ之最大可能估計値爲8.3

(2)

$$令P_1=P(M\le a \mid y=26)=\int_0^a k(\mu \mid y=26)d\mu$$

$$P_2=P(M\ge b \mid y=26)=\int_b^\infty k(\mu \mid y=26)d\mu$$

計算得下表:(註12)

a	5.7	5.78	5.783	5.784	b	11	11.8	11.900	11.901
P_1	0.0212	0.0248	0.0249	0.0250	P_2	0.0687	0.0282	0.0250	0.0249

由上表，可知μ之95% 可能界限爲(5.784,11.900)

(3)以0.05爲顯著水準,檢定

$H_0:\mu\le 6$對$H_1:\mu>6$

$P(M\le 6 \mid y=26)=\int_0^6 k(\mu \mid y=26)d\mu=0.0374<0.05$

否定H_0

在事前均勻分配假設下，實際經驗常態分配之平均數μ的推測方法

從常態分配$n(\mu,\sigma^2)$中抽取一組含n項的隨機樣本，令$Y=\bar{X}$ 表示隨機樣本的平均數，則Y的實際經驗分配是$n(\mu,\frac{\sigma^2}{n})$，其$p.d.f.$為

$$g(y\mid\mu)=\frac{\sqrt{n}}{\sqrt{2\pi}\,\sigma}\exp[-\frac{n(y-\mu)^2}{2\sigma^2}],-\infty<y<\infty$$

假設根據過去搜集到的資料，知道未知平均數μ是佈於[a,b]內的任意一個數值，a<b，亦即，視μ為隨機變數M之一值，定M的事前分配為均勻分配，其$p.d.f.$為

$$h(\mu)=\frac{1}{b-a},0<a\le\mu\le b$$

則Y與M的聯合$p.d.f.$為

$$k(y,\mu)=\frac{\sqrt{n}}{(b-a)\sqrt{2\pi}\,\sigma}\exp[-\frac{n(y-\mu)^2}{2\sigma^2}],$$

式中$-\infty<y<\infty,0<a\le\mu\le b$

因此Y的邊際$p.d.f.$為

$$k_1(y)=\frac{\sqrt{n}}{(b-a)\sqrt{2\pi}\,\sigma}\int_a^b\exp[-\frac{n(y-\mu)^2}{2\sigma^2}]d\mu$$

得M的事後$p.d.f.$為

$$k(\mu\mid y)=\frac{\exp[-\frac{n(y-\mu)^2}{2\sigma^2}]}{\int_a^b\exp[-\frac{n(y-\mu)^2}{2\sigma^2}]d\mu}\text{式中}0<a\le\mu\le b,-\infty<y<\infty$$

舉一實例說明其應用。

例6.從本校今年的新生中隨機調查36位同學，測量其體重得平均數$y=\bar{x}=56$ 公斤，標準差$S=\sqrt{2}$ 公斤。由以上資料可以假定每位同學的體重X服從常態分配n(μ,2)，誤差不大。因此Y的實際經驗分配為$n(\mu,\frac{2}{36})$。次由歷年來的統計資料，知道未知平均數μ是區間[50,60]內任意一值，亦即視μ為隨機變數M之值，定M的事前$p.d.f.$為$h(\mu)=\frac{1}{10},50\le\mu\le60$求

(1)μ之最大可能估計值

(2)μ之95%可能界限

(3)以0.05爲顯著水準,檢定$H_0: \mu \le 55$對$H_1: \mu > 55$

解:已知a=50, b=60, y=56, $\sigma = \sqrt{2}$, n=36

Y與M的聯合$p.d.f$爲

$$k(y, \mu) = \frac{6}{20\sqrt{\pi}} \exp[-\frac{36(y-\mu)^2}{4}]$$

式中$-\infty < y < \infty, 50 \le \mu \le 60$

Y的邊際$p.d.f$爲

$$k_1(y) = \frac{6}{20\sqrt{\pi}} \int_{50}^{60} \exp[-9(y-\mu)^2] d\mu$$

得M的事後$p.d.f$爲

$$k(\mu \mid y=56) = \frac{\exp[-9(56-\mu)^2]}{\int_{50}^{60} \exp[-9(56-\mu)^2] d\mu} = 1.692568751 \exp[-9(56-\mu)^2]$$

式中$50 \le \mu \le 60$

(1)對各不同之μ值，計算得$k(\mu \mid y=56)$，如下表:(註13)

μ	55.5	55.6	55.7	55.8	55.9	56.0	56.1
$k(\mu \mid y=56)$	0.1784	0.4010	0.7530	1.1809	1.5469	1.6926	1.5469

由上表可知之最大可能估計値爲56.0

(2)令$P_1 = P(M \le a \mid y=56) = \int_{50}^{a} k(\mu \mid y=56) d$

$P_2 = P(M \ge b \mid y=56) = \int_{b}^{60} k(\mu \mid y=56) d$

計算得下表:(註14)

a	55.5	55.54	55.538	b	56.4	56.45	56.461	56.462	56.463
P_1	0.0169	0.0255	0.0250	P_2	0.0448	0.0281	0.0252	0.0250	0.0247

由上表得μ之95%可能界限爲(55.538,56.462)

$(3) P(M \leq 55 \mid y=26) = \int_{50}^{55} k(\mu \mid y=56) d\mu = 0.0000 < 0.05$

否定$H_0 : \mu \leq 55$

在事前常態分配假設下，實際經驗常態分配之平均數的推測方法

從常態分配$n(\mu,\sigma^2)$中抽取一組含n項的隨機樣本，令$Y=\bar{X}$ 表示該組隨機樣本之平均數，則Y的實際經驗分配爲$n(\mu\frac{\sigma^2}{n})$假設根據過去搜集到的資料，知道該分配的未知平均數μ係常態分配$n(\theta,T^2)$的一値，即視μ爲隨機變數M之一値，定M的事前分配爲$n(\theta,T^2)$，

若令M服從$n(\mu_1,\sigma_1^2)$，Y｜μ服從$n(\mu_2+\rho\frac{\sigma_2}{\sigma_1}(\mu-\mu_1),\sigma_2^2(1-\rho^2)$

則Y與M的聯合分配爲二元常態分配(Bivariate Normal distribution)，母數是$\mu_1,\mu_2,\sigma_1^2,\sigma_2^2$與$\rho$。

因此Y服從$n(\mu_2,\sigma_2^2)$，M｜y服從$n(\mu_1+\rho\frac{\sigma_1}{\sigma_2}(y-\mu_2),\sigma_1^2(1-\rho^2)$

但$\mu_1=\theta,\ \sigma_1^2=T^2$ $(1)\ \sigma_2^2(1-\rho^2)=\frac{\sigma^2}{n}$ $(2) \mu_2+\rho\frac{\sigma_2}{\sigma_1}(\mu-\mu_1)=\mu$

由(2)式$\rho\frac{\sigma_2}{\sigma_1}(\mu-\mu_1)=\mu-\mu_2$ 得$\mu_2=\mu_1=\theta$及$\rho\frac{\sigma_2}{\sigma_1}=1$,

即$\rho\sigma_2=\sigma_1=T$，亦即$\rho^2\sigma_2^2=T^2$

代入(1)式 $\sigma_2^2(1-\rho^2)=\frac{\sigma_2}{n}$，即$\sigma_2^2-T^2=\frac{\sigma_2}{n}$

得$\sigma_2^2=T^2+\frac{\sigma^2}{n}$及$\rho=\frac{T}{\sqrt{T^2+\frac{\sigma^2}{n}}}$

則$\rho\frac{\sigma_1}{\sigma_2}=\frac{T}{\frac{T}{\sqrt{T^2+\frac{\sigma^2}{n}}}}\cdot\frac{T}{\frac{T}{\sqrt{T^2+\frac{\sigma^2}{n}}}}=\frac{T^2}{T^2+\frac{\sigma^2}{n}}$

故M之事後分配爲

M｜y服從$n(\theta+\frac{T^2}{T^2+\frac{\sigma^2}{n}}(y-\theta),\frac{T^2\sigma^2}{nT^2+\sigma^2})$

舉一實例說明其應用

例7.從本校今年的新生中隨機調查36位同學，測量其身高得平均數$y=\bar{x}=165$公分，標準差$s=5$公分，由以上資料可以合理地認爲Y的實際經驗分配爲$n(\mu,\frac{25}{35})$，(此地以s^2代替σ^2，誤差不大)又歷年來的統計資料，知新生平均身高M是服從常態分配$n(164,1)$，求

(1)μ之最大可能估計值

(2)μ之95%可能界限

(3)以0.05爲顯著水準，檢定$H_0:\mu\geq 166$對$H_1:\mu<166$

解：已知$\theta=164$，$T^2=1$，$n=36$，$\sigma^2=25$，$y=165$

$$\theta+\frac{T^2}{T^2+\frac{\sigma^2}{n}}(y-\theta)=164+\frac{1}{1+\frac{25}{36}}(165-164)=164.59$$

$$\frac{T^2\sigma^2}{nT^2+\sigma^2}=\frac{1\times 25}{36\times 1+25}=0.4098$$

得$M\mid y=165$服從$n(164.59,0.4098)$

(1)μ之最大可能估計值爲164.59公分。

(2)μ之95%可能界限爲$(164.59\mp 1.96\sqrt{0.4098})=(163.3,165.8)$

(3)$P(M\geq 166\mid y=165)$

$$=P(Z\geq\frac{166-164.59}{\sqrt{0.4098}})=P(Z\geq 2.2025)=0.0138<0.05$$

否定$H_0:\mu\geq 166$

結　　論

本文討論數種常用的事前分配與實際經驗分配，導出母數θ的事後分配，藉以建立θ的推測方法。爲便於應用，茲綜合列表於下：

事前分配及其$p.d.f.$	實際經驗分配及其$p.d.f.$	事　後　分　配
Beta分配 $h(p)=\frac{\Gamma(\alpha+\beta)}{\Gamma(\alpha)\Gamma(\beta)}p^{\alpha-1}(1-p)^{\beta-1}$ 式中0<p<1	二項分配 $g(y\mid p)=\binom{n}{y}p^{y}(1-p)^{n-y}$ y=0,1,2,…,n	Beta分配 母數爲α+y與β+n-y
均勻分配 $h(p)=\frac{1}{b-a}$ $0<a\le p\le b<1$	二項分配 $g(y\mid p)=\binom{n}{y}p^{y}(1-p)^{n-y}$ y=0,1,2,…,n	$k(p\mid y)=\frac{p^{y}(1-p)^{n-y}}{\int_a^b p^{y}(1-p)^{n-y}dp}$ $0<a\le p\le b<1$
均勻分配 $h(\mu)=\frac{1}{b-a}$ $0<a\le\mu\le b$	Poisson分配 $g(y\mid\mu)=\frac{(n\mu)^{y}e^{-n\mu}}{y!}$ y=0,1,2,…,n	$k(\mu\mid y)=\frac{(n\mu)^{y}e^{-n\mu}}{\int_a^b(n\mu)^{y}e^{-n\mu}d\mu}$ $0<a\le\mu\le b$
Gamma分配 $h(\mu)=\frac{1}{\Gamma(\alpha)\beta^{\alpha}}\mu^{\alpha-1}e^{-\frac{\mu}{\beta}}$ $0<\mu<\infty$	Poisson分配 $g(y\mid\mu)=\frac{(n\mu)^{y}e^{-n\mu}}{y!}$ y=0,1,2,…,n	Gamma分配母數分別爲 α+y與$\frac{\beta}{n\beta+1}$
卡方分配 $h(\mu)=\frac{1}{\Gamma(\frac{r}{2})2^{r/2}}\mu^{r/2-1}e^{-\mu/2}$ $0<\mu<\infty$	Poisson分配 $g(y\mid\mu)=\frac{(n\mu)^{y}e^{-n\mu}}{y!}$ y=0,1,2,…,n	Gamma分配母數爲 $\frac{r}{2}+y$　與$\frac{2}{2n+1}$
均勻分配 $h(\mu)=\frac{1}{b-a}$ $0<a\le\mu\le b$	常態分配 $g(y\mid\mu)=\frac{\sqrt{n}}{\sqrt{2\pi}\,\sigma}e^{-\frac{n(y-\mu)^2}{2\sigma^2}}$ $-\infty<y<\infty$, σ^2 爲已知數	$k(\mu\mid y)=\frac{\exp[-\frac{n(y-\mu)^2}{2\sigma^2}]}{\int_a^b\exp[-\frac{n(y-\mu)^2}{2\sigma^2}]d\mu}$
常態分配 $h(\mu)=\frac{1}{\sqrt{2\pi}\,T}e^{-\frac{(\mu-\theta)^2}{2T^2}}$ $-\infty<\mu<\infty$	常態分配 $g(y\mid\mu)=\frac{\sqrt{n}}{\sqrt{2\pi}\,\sigma}e^{-\frac{n(y-\mu)^2}{2\sigma^2}}$ $-\infty<y<\infty$, σ^2 爲已知數	常態分配 平均數$=\theta+\frac{T^2}{T^2+\frac{\sigma^2}{n}}(y-\theta)$ 變異數$=\frac{T^2\sigma^2}{nT^2+\sigma^2}$

附　　註

使用Casio fx-3600PV 程式輸入法

【註 1】MODE EXP SHIFT PCL P_1 ENT SHIFT Min 1.36400601 EXP 26 × MR X^y 25 X [(⋯ 1 − MR ⋯)] X^y 81 = SHIFT RTN MODE ·

【註 2】MODE EXP SHIFT PCL P_1 SHIFT Min 1.36400601 EXP 26× MR X^y 25 × [(⋯ 1 − MR ⋯)] X^y 81 = MODE 1 ·

【註 3】MODE EXP SHIFT PCL P_1 SHIFT Min MR X^y 6 × [(⋯ 1 − MR ⋯)] X^y 24 = MODE 1 P_1 0.1 RUN 0.3 RUN (稍候) KOUT 6

【註 4】MODE EXP SHIFT PCL P_1 ENT SHIFT Min MR X^y 6 × [(⋯ 1 − MR ⋯)] X^y 24 ÷ 4.53518 EXP 8 +/- = SHIFT RTN MODE ·

【註 5】MODE EXP SHIFT PCL P_1 SHIFT Min MR X^y 6 × [(⋯ 1 − MR ⋯)]X^y 24 ÷ 4.53518 EXP 8 +/- = MODE 1

【註 6】MODE EXP SHIFT PCL P_1 SHIFT Min MR X^y 7 × MR +/- SHIFT e^x = MODE 1 P_1 0 run 9 run (稍候) KOUT 6

【註 7】MODE EXP SHIFT PCL P_1 ENT SHIFT Min × 3 = Kin 1 3 ×KOUT 1 X^y 7 ×KOUT 1 +/- SHIFT e^x ÷ 3407.56 = SHIFT RTN MODE ·

【註 8】MODE EXP SHIFT PCL P_1 SHIFT Min 3 × [(⋯ 3 × MR ⋯)] X^y 7 × [(⋯ 3 × MR +/- ⋯)] SHIFT e^x ÷ 3407.56 = MODE 1

【註 9】MODE EXP SHIFT PCL P_1 ENT SHIFT Min 6 X^y 17 × MR X^y 16 X [(⋯ 6 × MR +/- ⋯)] SHIFT e^x ÷ 16 SHIFT X! = SHIFT RTN MODE ·

【註10】MODE EXP SHIFT PCL P_1 SHIFT Min 6 X^y 17 × MR X^y 16 X [(⋯ 6 × MR +/- ⋯)] SHIFT e^x ÷ 16 SHIFT X! = MODE 1

【註11】MODE EXP SHIFT PCL P_1 ENT SHIFT Min MR X^y 29 × [(⋯ 3.5 × MR +/-⋯)] SHIFT e^x ÷ 29 SHIFT X! ÷ 2 $a^{b/c}$ 7 X^y 30 = SHIFT RTN MODE ·

【註12】MODE EXP SHIFT PCL P_1 SHIFT Min MR X^y 29 × [(⋯ 3.5 × MR +/- ⋯)] SHIFT e^x ÷ 29 SHIFT X! ÷ 2 $a^{b/c}$ 7 X^y 30 = MODE 1

【註13】MODE EXP SHIFT PCL P_1 ENT SHIFT Min 1.692568751 × [(⋯ 9 +/- × [(⋯ 56 - MR ⋯)] SHIFT X^2 ⋯)] SHIFT e^x = SHIFT RTN MODE ·

【註14】MODE EXP SHIFT PCL P_1 SHIFT Min 1.692568751 × [(... 9 +/- [(⋯ 56 − MR ⋯)] SHIFT X^2 ⋯)] SHIFT e^x = MODE 1

參考文獻

1. John E. Freund Mathematical Statistics. 5th ed. London ： Prentice Hall Interantional. 1992
2. William Mendenhall and Terry Sincich 1992. Statistics for Engineering and the Sciences 3rd ed. New York ： Maxwell Macmillan International.
3. J Wesley Barnes 1994. Statistical Analysis for Engineers and Scientists McGraw Hill Taiwan
4. Steven F. Arnold 1990. Mathematical Statistics. London : Prentice Hall International.
5. Scheaffer McClave 1995. Probability and Statistics for Engineers. 4th ed. Wadsworth, Inc.
6. 胡坤德 1992 稀少性現象發生率之推測方法新解，東海學報33卷 P.833-840
7. 胡坤德 1994 以可能值建立統計推測方法之探討，東海學報35卷 P.35-39

A Study to Establish the Statistical Inference Using Bayesian Prob-value

Kun - Te Hu*

Abstract

The objective of this paper is to develop a method which is based on the Bayes method to derive the posterior distribution of a parameter by considering its prior and empirical distributions, so the paarameter may be better inferenced. The prior distributions decrcibed in this reseaarch include beta, uniform, gamma, chi-square and normal distributios. Three types of empirical distributions are covered: binomial, Poisson and normal distributions, each of them has a close relationship with defective percentage, defective numbers, and quantitative variables, respectively.

There are three contributions of this paper: (1) the forlmulas for deriving the posterior distribution of the aformentioned parameters, (2) the method for accurately calculating the value of probability, and (3) the concept of the most probable estimater and the probale boundary of a parameter, and a new approach for the test of hypotheses.

Key words : prior distribution, expirical distribution,posterior distribution, Bayes methods, prob-value, the most prob-estimater, probable boundary, test of hypothesis

*Department of Industrial Engineering, Tunghai University